131 Dev p 202 LES-Moni

Sous-algèbres réduites de $M_n(\mathbb{C})$

<u>Enoncé</u> : Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$ réduite, ie si $M \in \mathcal{A}$ nilpotente, alors $M=0$. Alors tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont codiagonalisables.

- On peut supposer $\mathcal{A}$ unitaire, en effet $\mathcal{A} + \mathbb{C} I_n$ est également réduite.

Soit $M = A + \lambda I_n$, $A \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ nilpotente. Si $\lambda = 0$ $M \in \mathcal{A}$ donc $M=0$

Si $\lambda \neq 0$. $A = M - \lambda I_n$ est inversible car M nilpotente

$AM = A^2 + \lambda A = MA$ donc AM est nilpotente et $AM \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est une algèbre donc $AM = 0$ donc $M = 0$.

Donc $\mathcal{A} + \mathbb{C} I_n$ est réduite.

Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} + \mathbb{C} I_n$ si $\mathcal{A} + \mathbb{C} I_n$ est co-diagonalisable $\mathcal{A}$ le sera également.

On suppose dorénavant $I_n \in \mathcal{A}$.

- Soit $A \in \mathcal{A}$, $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$ pour le polynôme caractéristique de A

Soit $m = \max_{1 \leq i \leq r} m_i$ et $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$, $\chi_A \mid P^m$ donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$ donc $P(A)^m = 0$ $P(A)$ est nilpotente

et dans $\mathcal{A}$ car $I_n \in \mathcal{A}$, $A^k \in \mathcal{A}$ pour tout $k \geq 1$ donc $P(A) = 0$

A est annulée par un polynôme scindé à racines simples donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

- Montrons que A est combinaison linéaire de projecteurs de $\mathcal{A}$

On a $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(A)$ Soit p_i la projection sur $E_{\lambda_i}(A)$ parallèlement

à la somme $\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(A)$ avec $I_n = \sum_{i=1}^{r} p_i$ on a $A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$

et les p_i sont des polynômes en A donc $p_i \in \mathcal{A}$ ($i \in [\![1, r]\!]$)

Donc $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(p \mid p \in \mathcal{A}, p^2 = p)$

- Montrons que $\mathcal{A}$ est commutative soit $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$ B un projecteur

$(BAB - BA)^2 = BABAB - BABAB - BABA + BABA = 0$

$(BAB - AB)^2 = BABAB - BABAB - ABAB + ABAB = 0$

$BAB - BA$ et $BAB - AB$ sont nilpotents et dans $\mathcal{A}$ donc

$BAB = BA$ et $BAB = AB$ d'où $AB = BA$ et comme $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(p \in \mathcal{A}, p^2 = p)$

on a pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ $AB = BA$ et tout élément de $\mathcal{A}$ est diagonalisable

on a déduit que tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont codiagonalisables.

- Application : $\mathbb{C}[A]$ est réduite si et seulement si A est diagonalisable.

- Sur $M_n(\mathbb{R})$? Toute sous-algèbre réduite est tout de même commutative.

- pour avoir la codiagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ il faut ajouter que tout élément soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.